

série 4

Série 4

Exercice 1: Méthode d'Euler explicite

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) = f(t) \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 10]$$

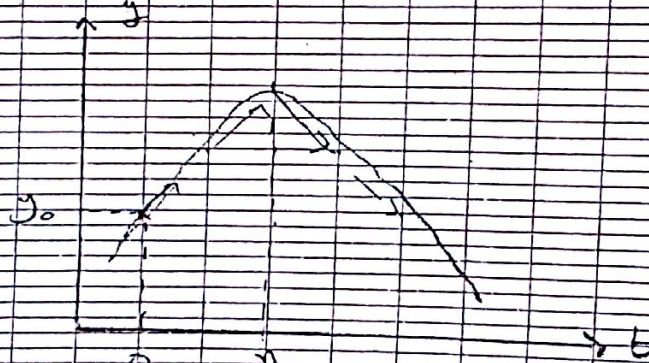
1/ la solution exacte du problème de Cauchy

$$\frac{dy}{dt} = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dt$$

$$\ln y = -t + C$$

$$\Rightarrow y = e^{-t+C}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y(t) = e^{-t}$$



Méthode d'Euler explicite:

$$y'(t+h) = y(t) + h y'(t)$$

$$y'(t) = -y(t)$$

$$y(t+h) = y(t) - h y(t)$$

Discretisation:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) - h y(t_n)$$

$$y_{n+1} = y_n - h y_n$$

$$y_{n+1} = (1-h) y_n$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Exercice 48
Problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) = f(t, y), & t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Lipschitz

On vérifie la condition de Lipschitz.

$$\begin{aligned} \exists K \in \mathbb{R}^+, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &\leq K |y_1(t) - y_2(t)| \\ |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= |1 + y_1(t) - (1 + y_2(t))| \\ &= |y_1(t) - y_2(t)| \end{aligned}$$

La condition de Lipschitz est vérifiée pour $K=1$.

solution :

$$\begin{cases} y' = 1 + y \\ y(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{dt} = 1 + y$$

$$\frac{dy}{1+y} = dt$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int dt = t + C$$

$$\ln(1+y) = t + C$$

$$1+y = Ke^t \rightarrow y = Ke^t - 1$$

$$y(0) = 0 \rightarrow K - 1 = 0 \rightarrow K = 1$$

donc $y(t) = e^t - 1$ c'est la solution unique

3/ a) $h = 0,1$

Le schéma d'Euler explicite :

$$y(t+h) = y(t) + h y'(t)$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n)$$

$$\begin{array}{cc} y_n & y_{n+1} \\ t_n & t_{n+1} \end{array}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \begin{cases} f(t_n) \rightarrow \text{explicit} \\ f(t_{n+1}) \rightarrow \text{implicit} \\ (1-\omega) f(t_n) + \omega f(t_{n+1}) \end{cases}$$

$$y_{n+1} = y_n + h (1+y_n)$$

$$y_{n+1} = (1+h) y_n + h$$

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= (1+h) y_n + h \\
 1 + y_{n+1} &= (1+h) y_n + 1 + h \\
 &= (1+h) (1 + y_n) \\
 &= (1+h)^2 (1 + y_{n-1}) \\
 &= (1+h)^3 (1 + y_{n-2}) \\
 &\vdots \\
 &= (1+h)^{n+1} (1 + y_0)
 \end{aligned}$$

$$y_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 1 + y_{n+1} &= (1+h)^{n+1} \\
 y_{n+1} &= (1+h)^{n+1} - 1 \\
 y_n &= (1+h)^n - 1
 \end{aligned}$$

$$t_n = nh$$

$$y(t) = (1+h)^{t/h} - 1$$

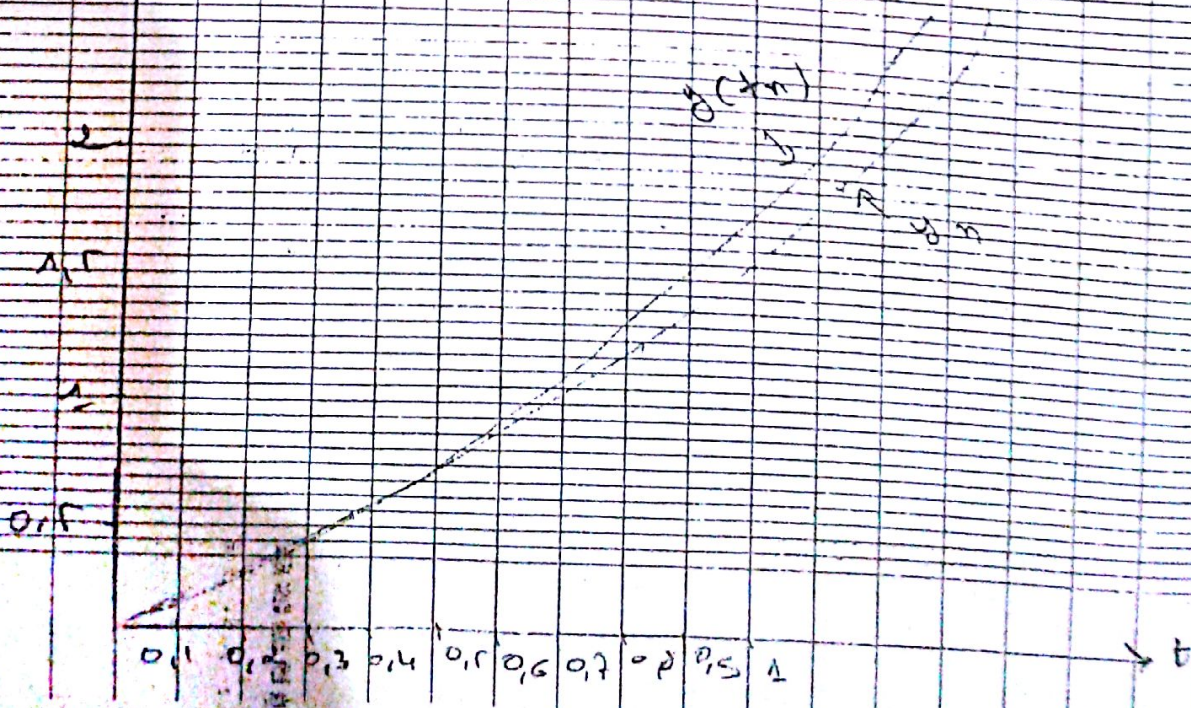
$$\begin{cases} y_n = (1.1)^n - 1 \\ y(t_n) = e^{t_n} \end{cases} \quad \text{with } t_n = nh$$

$$t_n = 1, \quad h = 0.1 \Rightarrow n = 10$$

$$y(1) = y_{10} = (1+h)^{10} - 1 = (1.1)^{10} - 1 = 1.993$$

b)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_n	0.100	0.21	0.33	0.46	0.61	0.77	0.94	1.14	1.36	1.69
$y(t)$	0.11	0.22	0.35	0.49	0.65	0.82	1.01	1.23	1.46	1.77



2) erreur :

$$e_n = y(t_n) - \tilde{y}_n$$

$$e_n = e^{nh} - 1 - ((1+R)^n - 1)$$

$$e_n = e^{nh} - (1+R)^n$$

$$e_n = e^{nh} - (1+R)^n$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_n \approx (1+nh) - (1+nh)$$

L'erreur de la méthode peut être réduite en diminuant le pas de discrétisation $\rightarrow$ solution stable

3) 2° systèmes :

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) = f(t) \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'(t) = 1 + z(t) = g(t) \\ z(0) = \beta \end{cases}$$

$$a) \quad u_{n+1} = (1+R)^{n+1} (1+u_0)$$

$$v_{n+1} = (1+R)^{n+1} (1+v_0)$$

$$u_n = (1+R)^n (1+\alpha) - 1$$

$$v_n = (1+R)^n (1+\beta) - 1$$

$$b) \quad |u_n - v_n| = (1+R)^n |\alpha - \beta| \rightarrow \text{l'erreur sur les solutions exactes est proportionnelle à l'erreur pour les conditions initiales}$$

$$(1+R)^n = 1 + nR \approx e^{nR}$$

$$|u_n - v_n| \approx e^{nR} |\alpha - \beta| \rightarrow \text{c'est une suite géométrique pour } R \text{ petit (convergente)}$$

e^{nR} est une suite convergente pour R si R devient de plus en plus petit $\rightarrow$ (solution stable)

ex2

Exercice 2 Méthode implicite :

$$P.b \begin{cases} y'(t) = -y(t) = f(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$1) \quad y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}) \\ = y_n - h y_{n+1} \quad \text{avec : } f(t_{n+1}) = -y_{n+1}$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n - h y_{n+1} \\ y_{n+1} (1+h) = y_n$$

$$y_{n+1} = \left(\frac{1}{1+h} \right) y_n$$

$$\text{solution } y_{n+1} = \left(\frac{1}{1+h} \right)^{n+1} \quad y_0 = \left(\frac{1}{1+h} \right)$$

$$y_n = \left(\frac{1}{1+h} \right)^n$$

$$3) \quad h > 0$$

$$\left(\frac{1}{1+h} \right) < 1$$

donc la solution est toujours convergente et stable.

4) contrairement à la méthode explicite qui présente des solutions divergentes ou oscillantes.

ex4

Exercice 48
1/ Problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On vérifie la condition de Lipschitz.
 $\exists K \in \mathbb{R}^+, |f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K |y_1(t) - y_2(t)|$
 $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |1 + y_1(t) - (1 + y_2(t))|$
 $= |y_1(t) - y_2(t)|$

La condition de Lipschitz est vérifiée pour $K=1$.

solution :

$$\begin{cases} y' = 1 + y \\ y(0) = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{dt} = 1 + y$$

$$\frac{dy}{1+y} = dt$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int dt$$

$$\ln(1+y) = t + C$$

$$1+y = Ke^t$$

$$\rightarrow y = Ke^t - 1$$

$$y(0) = 0$$

donc

$$\rightarrow K = 1 \Rightarrow y(t) = e^t - 1$$

$$\rightarrow n=1$$

c'est la solution unique

2/ a) $h = 0,1$

le schéma d'Euler explicite :

$$y(t+h) = y(t) + h y'(t)$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(t)$$

$$\begin{array}{c|c} y_n & y_{n+1} \\ \hline t_n & t_{n+1} \end{array} \rightarrow$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{w} + h \left\{ \begin{array}{l} f(t_n) \rightarrow \text{explicit} \\ f(t_{n+1}) \rightarrow \text{implicit} \\ (1-w)f(t_n) + wf(t_{n+1}) \end{array} \right.$$

$$y_{n+1} = y_n + h(1+y_n)$$

$$y_{n+1} = (1+h)y_n + h$$

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= (1+h) y_n + h \\
 1 + y_{n+1} &= (1+h) y_n + 1 + h \\
 &= (1+h) (1 + y_n) \\
 &= (1+h)^2 (1 + y_{n-1}) \\
 &= (1+h)^3 (1 + y_{n-2}) \\
 &\vdots \\
 &= (1+h)^{n+1} (1 + y_0)
 \end{aligned}$$

$$y_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 1 + y_{n+1} &= (1+h)^{n+1} \\
 y_{n+1} &= (1+h)^{n+1} - 1
 \end{aligned}$$

$$y_n = (1+h)^n - 1$$

$$t_n = n \cdot h$$

$$y(t) = (1+h)^{t/h} - 1$$

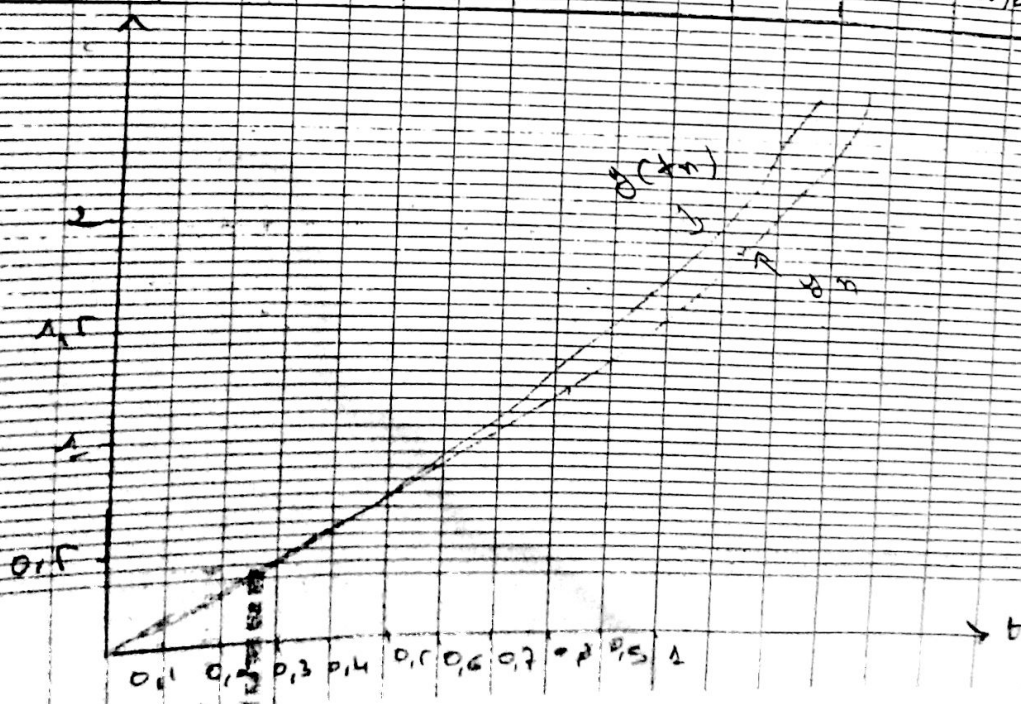
$$t_n = 1, \quad h = 0,1 \quad \text{for } n = 10$$

$$y(1) = y_{10} = (1+h)^{10} - 1 = (1,1)^{10} - 1 = 1,593$$

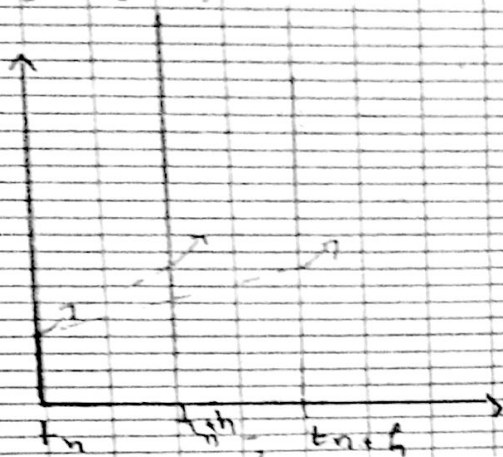
$$\begin{cases} y_n = (1,1)^n - 1 \\ y(t_n) = e^{t_n} \end{cases} \quad \text{solution exacte}$$

b)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_n	0,100	0,21	0,33	0,46	0,61	0,77	0,94	1,14	1,36	1,59
$y(t)$	0,11	0,22	0,35	0,49	0,65	0,82	1,01	1,23	1,46	1,78



$$\begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) = f(t, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$



$$y_1 = h y_0$$

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n)$$

et par

$$\begin{cases} y_1 = h y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = h f(t_1, y_1) \\ y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 1 + y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \end{cases}$$

$$y_1 = 1 + y_0$$

x	y	xy	x^2	y^2
0	0	0	0	0
1	0.1	0.05	1.01	0
2	0.2	0.44	0.201	0
3	0.3	0.360	0.360	0.001
4	0.4	0.151	0.450	0.002
5	0.5	0.669	0.669	0.002
6	0.6	0.810	0.810	0.002
7	0.7	1.011	1.011	0.002
8	0.8	0.223	1.426	0.003
9	0.9	1.416	1.416	0.005
10	1.0	1.714	1.714	0.006

$$E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$



$$e_n = |y(t_n) - y_n|$$

$$= e^{t_n} - 1 = \left[\left(1 + h + \frac{h^2}{2} \right)^n - 1 \right]$$

$$= e^{nh} - \left(1 + h + \frac{h^2}{2} \right)^n$$

$$= (e^h)^n - \left(1 + h + \frac{h^2}{2} \right)^n$$

$$\begin{matrix} n \rightarrow \infty \\ h \rightarrow 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} e_n = \left(1 + h + \frac{h^2}{2} \right)^n - \left(1 + h + \frac{h^2}{2} \right)^n \Rightarrow 0$$

3) La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 permet de donner une meilleure précision comparée au schéma d'Euler explicite au fait qu'il s'agit d'une précision d'ordre 4.

ex6

Exercice 6: Méthode de Runge Kutta d'ordre 4:

$$\text{système} \begin{cases} y'(t) = 1 + y(t) = f(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

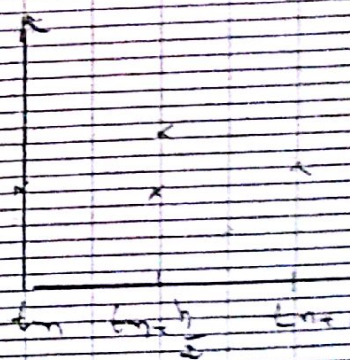
4 Pas
1 pas par

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{h}{2} \cdot k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{h}{2} \cdot k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(t_n + h, h \cdot k_3\right)$$



$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \bar{m}_n \quad \bar{m}_n = \frac{\sum_{i=1}^4 \alpha_i k_i}{\sum_{i=1}^4 \alpha_i}$$

$$P_1 = f(t_n, y_n) = 1 + y_n$$

$$P_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{h}{2} P_1\right) = f\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{h}{2} (1 + y_n)\right)$$

$$P_2 = 1 + \frac{h}{2} (1 + y_n)$$

$$P_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{h}{2} P_2\right) = f\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{h}{2} \left(1 + \frac{h}{2} (1 + y_n)\right)\right)$$

$$P_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} (1 + y_n)\right)$$

$$P_3 = 1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} (1 + y_n)$$

$$P_4 = f\left(t_n + h, \frac{h}{2} P_3\right) = f\left(t_n + h, \frac{h}{2} + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4} (1 + y_n)\right)$$

$$P_4 = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4} (1 + y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \left[\underbrace{1 + y_n}_{P_1} + \underbrace{2 + h(1 + y_n)}_{2P_2} + \underbrace{1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4} (1 + y_n)}_{P_4} \right] (1 + y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \left[6 + 3h + h^2 + \frac{h^3}{4} + \left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{4}\right) y_n \right]$$

correct

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} \left(6 + 3h + \frac{h^2}{4} \right) (1 + y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \left(h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} \right) (1 + y_n)$$

$$\begin{aligned} 1 + y_{n+1} &= 1 + y_n + a(1 + y_n) \\ &= (1 + y_n)(1 + a) \\ &= (1 + a)^n (1 + y_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1 + a)^{n+1} (1 + y_0) \\ &= (1 + a)^{n+1} \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = (1 + a)^{n+1} - 1$$

$$y_n = (1 + a)^n - 1$$

